

Universidade Federal do Paraná

Análise de von Neumann de um modelo dispersivo de ondas internas

Aluno: Willian Carlos Lesinovsky

Orientadora: Ailín Ruiz de Zárate Fabregas

Curitiba, 12 de Maio de 2017

Introdução

Ondas internas existem devido à estratificação do oceano pela diferença de densidade da água. A estratificação pode ser causada pela variação de salinidade ou por variações de temperatura, dentre as causas mais comuns.

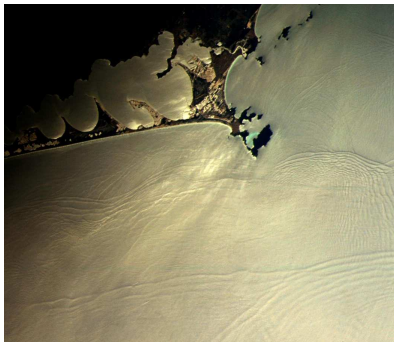
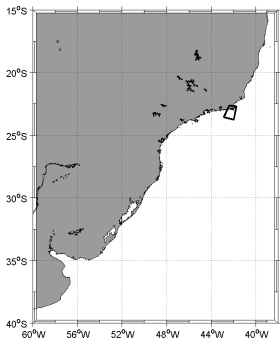


Figura: Ondas internas.

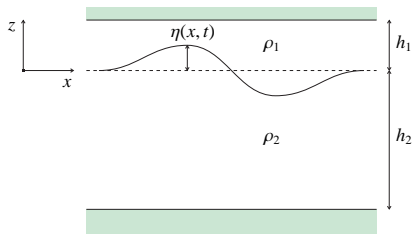


Figura: Configuração de duas camadas com tampa rígida e fundo plano.

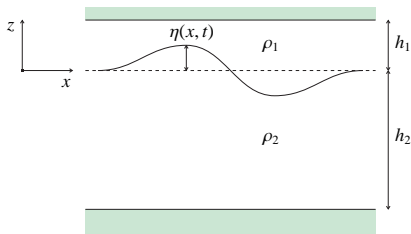


Figura: Configuração de duas camadas com tampa rígida e fundo plano.

$$\begin{cases} \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = 0 \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta [u]_{xt} + \frac{\beta}{3} u_{xxt}. \end{cases}$$

- ▶ O modelo descreve a evolução ao longo do tempo t da onda interna descrita por $\eta(x, t)$ junto com a média da velocidade horizontal da camada superior $u(x, t)$.
- ▶ Para garantir uma configuração estável assumimos $\rho_2 > \rho_1 > 0$.
- ▶ A camada superior é delgada se comparada à longitude de onda característica (L), ou seja, $0 < h_1 < L$.
- ▶ A amplitude característica da perturbação da interface é denotada por $a > 0$ e é pequena quando comparada com h_1 .
- ▶ A camada inferior $h_2 > 0$ é comparável com L .
- ▶ O sistema de coordenadas (x, z) está situado à altura da interface em repouso.

- ▶ O domínio é periódico na variável x .
- ▶ $\beta = \left(\frac{h_1}{L}\right)^2$ é o parâmetro de dispersão.
- ▶ $\alpha = a/h_1$ é pequeno e da mesma ordem de β .
- ▶ Transformada de Hilbert na faixa

$$\widehat{\mathcal{T}_\delta[f]}(k) = i \coth(\delta k) \widehat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}^*.$$

- ▶ $\delta = h_2/L$.

Objetivos

- ▶ Discretização do sistema linearizado ($\alpha = 0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t = u_x, \\ u_t - \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\beta} \mathcal{T}_\delta[u]_{xt} - \frac{\beta}{3} u_{xxt} = \eta_x. \end{array} \right.$$

- ▶ Análise de estabilidade do esquema numérico para o sistema linearizado via análise de von Neumann.
- ▶ Utilizar estes resultados para a implementação de um esquema numérico para o sistema fracamente não linear.
- ▶ Análise de resultados obtidos.

Discretização do modelo

A discretização do sistema linearizado se dará por meio do método de linhas.

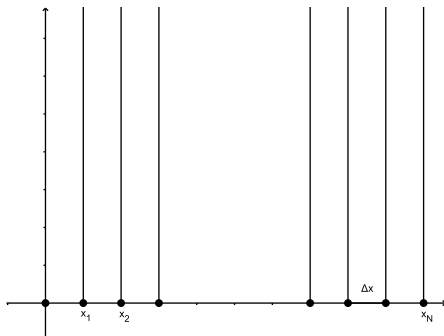


Figura: Ilustração do método de linhas.

Semi-discretização espacial

- ▶ Considerando $N \in \mathbb{N}$ um número par e $\Delta x = 2l/N$, os pontos da malha espacial são

$$x_j = j\Delta x, j = 1, \dots, N$$

- ▶ Funções vetoriais $\mathbf{u}(t) = [u_1, \dots, u_N]^T$ e $\boldsymbol{\eta}(t) = [\eta_1, \dots, \eta_N]^T$ onde, $u_j = u(x_j, t)$ e $\eta_j = \eta(x_j, t)$, $j = 1, \dots, N$.
- ▶ Função auxiliar ψ definida por

$$\psi = u - \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\beta} \mathcal{T}_{\delta, x}[u] - \frac{\beta}{3} u_{xx}.$$

- ▶ De forma análoga temos $\boldsymbol{\psi}(t)$ onde $\psi_j = \psi(x_j, t)$.

O nosso objetivo é determinar matrizes C e P tais que

$$\mathbf{u}_x \approx C\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\eta}_x \approx C\boldsymbol{\eta} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\psi} \approx P\mathbf{u}$$

de modo que, se considerarmos a igualdade nestas aproximações, obtemos o sistema de $2N$ EDOs

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_t = C\mathbf{u}, \\ P\mathbf{u}_t = C\boldsymbol{\eta}. \end{cases}$$

Desde que P seja invertível, podemos apresentar este como

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_t \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & C \\ P^{-1}C & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Transformada de Fourier discreta

Podemos escrever a TFD em uma versão matricial através da matriz de Fourier F dada por

$$F_{m,j} = \exp(-2\pi i(m - N/2)j/N), \quad 1 < m, j < N$$

Denotando $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_N]^T$ e $\hat{\mathbf{f}} = [\hat{f}_{-N/2}, \dots, \hat{f}_{N/2}]^T$ temos

$$\hat{\mathbf{f}} = \Delta_x F \mathbf{f}$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2l} \bar{F}^T \hat{\mathbf{f}}.$$

$$\mathbf{g} = \frac{1}{N} \bar{F}^T D F \mathbf{f},$$

onde D é uma matriz diagonal.

Matriz C

Para preservar as características do modelo, C deve ser

- ▶ Real.
- ▶ anti-simétrica ($C^T = -C$).
- ▶ Toeplitz circulante.

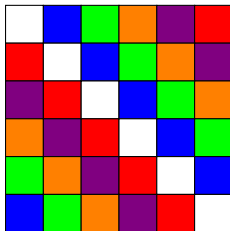


Figura: Ilustração de uma matriz Toeplitz circulante.

Como C é Toeplitz circulante, ela é completamente determinada pelos valores

$$c_1, \dots, c_N$$

que compõem a sua primeira coluna.

C é diagonalizada pela matriz de Fourier e seus autovalores tem a forma

$$\lambda_k(C) = \sum_{m=1}^N c_m e^{i(m-1)\theta_k},$$

$$\theta_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad -N/2 + 1 \leq k \leq N/2.$$

Matriz C

Os autovalores de C podem ser escritos como

$$\lambda_k(C) = \frac{i}{\Delta x} \gamma(\theta_k), \quad -N/2 + 1 \leq k \leq N/2,$$

onde a função auxiliar γ definida para $\theta \in [-\pi, \pi]$ é dada por

$$\gamma(\theta) = 2\Delta x \sum_{m=1}^{N/2-1} c_{1+m} \sin(m\theta),$$

Diferenças Finitas

$$u_x(x_j) \approx (C\mathbf{u})_j = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{2}{3}(u_{j+1} - u_{j-1}) + \frac{1}{12}(u_{j-2} - u_{j+2}) \right).$$

A matriz C é denotada por C^{FD} e os coeficientes $c_i = c_i^{FD}$ são definidos como

$$c_2^{FD} = -c_N^{FD} = \frac{2}{3\Delta x}, \quad c_3^{FD} = -c_{N-1}^{FD} = -\frac{1}{12\Delta x}, \quad c_i = 0 \text{ c.c..}$$

Assim obtemos a expressão

$$\gamma^{FD}(\theta) = 2\Delta x \left(\frac{2}{3\Delta x} \sin \theta - \frac{1}{12\Delta x} \sin 2\theta \right) = \frac{4}{3} \sin \theta - \frac{1}{6} \sin 2\theta.$$

B-Spline

A matriz C é dada por $C^{BS} = Q^{-1}B$, onde B , Q são duas matrizes Toeplitz circulares cujos coeficientes seguem a relação

$$c_2^B = -c_N^B = 3, \quad c_i^B = 0 \text{ caso contrário,}$$
$$c_1^Q = 4\Delta x, \quad c_2^Q = c_N^Q = \Delta x, \quad c_i^Q = 0 \text{ caso contrário.}$$

γ^{BS} tem a forma

$$\gamma^{BS}(\theta) = \frac{3}{2} \left(\frac{\text{sen}(\theta)}{1 + \cos(\theta)/2} \right).$$

Diferenciação Espectral

Os coeficientes de C^{SP} são definidos como

$$c_1^{SP} = 0, \quad c_i^{SP} = \frac{(-1)^{N+1-i}\pi}{2l} \cot\left(\frac{\theta_{N+1-i}}{2}\right).$$

A função γ^{SP} é calculada utilizando o fato de que $\lambda_k(C^{SP}) = i\pi k/l$, $-N/2 + 1 \leq k \leq N/2 - 1$, e $\lambda_0(C^{SP}) = 0$ tem multiplicidade dois

$$\gamma^{SP}(\theta) = \begin{cases} \theta, & \theta \in (-\pi, \pi) \\ 0, & \theta = \pm\pi. \end{cases}$$

$$\gamma^{FD}(\theta) = \frac{4}{3} \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{6} \operatorname{sen} 2\theta.$$

$$\gamma^{BS}(\theta) = \frac{3}{2} \left(\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{1 + \cos(\theta)/2} \right).$$

$$\gamma^{SP}(\theta) = \begin{cases} \theta, & \theta \in (-\pi, \pi) \\ 0, & \theta = \pm\pi. \end{cases}$$

A escolha da discretização vai depender das propriedades de estabilidade que serão discutidas a seguir.

Discretização de ψ

A discretização de ψ será feita por meio de séries de Fourier e transformada de Fourier discreta.

$$\phi(\kappa) = \begin{cases} 1, & \kappa = 0 \\ \kappa \coth \kappa, & \kappa \neq 0 \end{cases}$$

$$(\mathcal{T}_{\delta,x}[u])^\wedge(k) = \frac{1}{\delta} \phi(k\pi\delta/l) \hat{u}(k)$$

Logo, podemos escrever $\hat{\psi}(k)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(k) &= \hat{u}(k) - \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\beta} (\mathcal{T}_{\delta,x}^{\lambda}[u])(k) - \frac{\beta}{3} \hat{u}_{xx}(k) \\ &= \hat{u}(k) + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\sqrt{\beta}}{\delta} \phi(k\pi\delta/l) \hat{u}(k) + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \frac{\beta}{3} \hat{u}(k) \\ &= \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\sqrt{\beta}}{\delta} \phi(k\pi\delta/l) + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \frac{\beta}{3}\right) \hat{u}(k) \\ &= v(k\pi/l)^{-2} \hat{u}(k),\end{aligned}$$

onde,

$$v(\kappa) = \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\sqrt{\beta}}{\delta} \phi(\kappa\delta) + \kappa^2 \frac{\beta}{3}\right)^{-1/2}.$$

Usando a Transformada discreta de Fourier temos

$$\hat{\psi}(k) = v(k\pi/l)^{-2} \hat{u}(k),$$

que pode ser escrita matricialmente como

$$\hat{\psi} = \hat{P} \hat{u}, \quad \text{onde} \quad \hat{P} = \text{diag} (v(k\pi/l)^{-2})$$

Logo,

$$\psi = \frac{1}{2l} \bar{F}^T \hat{\psi} = \frac{1}{2l} \bar{F}^T \hat{P} \hat{u} = \frac{1}{2l} \bar{F}^T \hat{P} \Delta_x F \mathbf{u} = \frac{1}{N} \bar{F}^T \hat{P} F \mathbf{u} = P \mathbf{u},$$

onde,

$$\lambda_k(P) = v(k\pi/l)^{-2}.$$

Discretização temporal

O método de linhas funciona bem se os autovalores do operador do sistema semi-discretizado linear, escalados por Δt , estão na região de estabilidade do método usado para a integração temporal.

Lema

Os autovalores da matriz D do sistema (9) são imaginários puros e são dados por $\lambda_k(D) = \pm \lambda_k(C) / \sqrt{\lambda_k(P)}$.

Suponhamos que $[\mathbf{v}_k^T \ \alpha \mathbf{v}_k^T]^T$ é um autovetor de D , sendo \mathbf{v}_k a k -ésima coluna de F e α uma constante a ser determinada, temos então

$$D \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k \\ \alpha \mathbf{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \lambda_k(C) \mathbf{v}_k \\ (\lambda_k(C)/\alpha \lambda_k(P)) \alpha \mathbf{v}_k \end{bmatrix}.$$

Para que $[\mathbf{v}_k^T \ \alpha \mathbf{v}_k^T]^T$ seja autovetor de D deve ocorrer

$$\alpha \lambda_k(C) = \frac{\lambda_k(C)}{\alpha \lambda_k(P)} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{\lambda_k(P)} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_k(P)}},$$

Logo, os autovalores de D são

$$\lambda_k(D) = \pm \lambda_k(C) / \sqrt{\lambda_k(P)}.$$

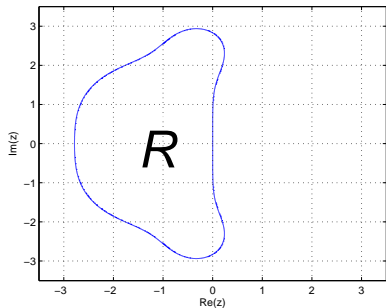


Figura: Região de estabilidade do método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Vamos considerar a malha $t_n = n\Delta t$, onde Δt é o passo de integração do método.

Ao aplicar RK4 no sistema semi-discretizado este terá a forma

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{n+1} \\ \mathbf{u}^{n+1} \end{bmatrix} = \left(I + \Delta t D + \frac{\Delta t^2}{2} D^2 + \frac{\Delta t^3}{3!} D^3 + \frac{\Delta t^4}{4!} D^4 \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^n \\ \mathbf{u}^n \end{bmatrix},$$

onde $\boldsymbol{\eta}^n$ e \mathbf{u}^n são as aproximações calculadas pelo método para $\boldsymbol{\eta}(t_n)$ e $\mathbf{u}(t_n)$.

$$D^2 = \begin{bmatrix} P^{-1}C^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P^{-1}C^2 \end{bmatrix}, D^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P^{-1}C^3 \\ P^{-2}C^3 & \mathbf{0} \end{bmatrix} e$$

$$D^4 = \begin{bmatrix} P^{-2}C^4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P^{-2}C^4 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}^{n+1} = \left[I + \frac{\Delta t^2}{2} P^{-1} C^2 + \frac{\Delta t^4}{4!} P^{-2} C^4 \right] \boldsymbol{\eta}^n + \left[\Delta t C + \frac{\Delta t^3}{3!} P^{-1} C^3 \right] \mathbf{u}^n, \\ \mathbf{u}^{n+1} = \left[\Delta t P^{-1} C + \frac{\Delta t^3}{3!} P^{-2} C^3 \right] \boldsymbol{\eta}^n + \left[I + \frac{\Delta t^2}{2} P^{-1} C^2 + \frac{\Delta t^4}{4!} P^{-2} C^4 \right] \mathbf{u}^n. \end{cases}$$

Resultado do sistema linearizado

Teorema

Sejam $\eta(\cdot, 0) \in H^s$ e $u(\cdot, 0) \in H^{s+1}$, com $s > 0$, as condições iniciais do sistema linearizado. Existe uma constante positiva C que só depende de s tal que

$$\|[\eta(\cdot, t), u(\cdot, t)]^T\|_{s,s+1} \leq C \|[\eta(\cdot, 0), u(\cdot, 0)]^T\|_{s,s+1}, \quad \forall t > 0.$$

onde $\eta(x, t)$ e $u(x, t)$ são soluções do sistema linearizado.

Estabilidade do esquema numérico

Para garantir a estabilidade do esquema numérico devemos mostrar que, sob determinadas condições, existe uma constante positiva C_s que não depende de n nem de Δt tal que vale a desigualdade

$$\|[\boldsymbol{\eta}^n, \mathbf{u}^n]^T\|_{N,s,s+1} \leq C_s \|[\boldsymbol{\eta}^0, \mathbf{u}^0]^T\|_{N,s,s+1}, \quad \forall n\Delta t \leq T.$$

onde,

$$\|f\|_{N,s}^2 = 2\pi \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} (1 + (k\pi/l)^2)^s |\hat{f}(k)|^2.$$

e

$$\|[\mathbf{f}, \mathbf{g}]^T\|_{N,s,r}^2 = \|f\|_{N,s}^2 + \|g\|_{N,r}^2$$

Ao transformarmos o esquema numérico para o espaço de Fourier temos, para $-N/2 + 1 \leq k \leq N/2$,

$$\begin{bmatrix} \hat{\eta}_k^{n+1} \\ \hat{u}_k^{n+1} \end{bmatrix} = G_k \begin{bmatrix} \hat{\eta}_k^n \\ \hat{u}_k^n \end{bmatrix},$$

onde

$$G_k = \begin{bmatrix} c(\theta_k, \sigma, \Delta x) & iv^{-1}(\frac{\theta_k}{\Delta x})s(\theta_k, \sigma, \Delta x) \\ iv(\frac{\theta_k}{\Delta x})s(\theta_k, \sigma, \Delta x) & c(\theta_k, \sigma, \Delta x) \end{bmatrix},$$

$$c(\theta, \sigma, \Delta x) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 v^2(\frac{\theta}{\Delta x})\gamma^2(\theta) + \frac{1}{4!}\sigma^4 v^4(\frac{\theta}{\Delta x})\gamma^4(\theta),$$

$$s(\theta, \sigma, \Delta x) = \sigma v(\frac{\theta}{\Delta x})\gamma(\theta) - \frac{1}{3!}\sigma^3 v^3(\frac{\theta}{\Delta x})\gamma^3(\theta).$$

De maneira recursiva obtemos $[\hat{\eta}_k^n, \hat{u}_k^n]^T = G_k^n [\hat{\eta}_k^0, \hat{u}_k^0]^T$.

Sendo g_k^\pm os autovalores da matriz G_k ,

$$g_k^\pm = g^\pm(\theta, \sigma, \Delta x) = c(\theta_k, \sigma, \Delta x) \mp i s(\theta_k, \sigma, \Delta x)$$

Temos a seguinte condição de estabilidade

Proposição (Condição de von Neumann)

Sejam $\beta > 0$ e $s \geq 0$. Uma condição suficiente para que o esquema numérico seja estável em $H_N^{(s,s+1)}$ é

$$|g^\pm(\theta, \sigma, \Delta x)| \leq 1$$

para todo $\theta \in (-\pi, \pi]$.

Lema

Existem constantes positivas c_1 e c_2 tal que $\forall y \in \mathbb{R}$

$$c_1 \leq \frac{1 + ay \coth(\delta y) + by^2}{1 + y^2} \leq c_2.$$

Se considerarmos $a = (\rho_2/\rho_1)\sqrt{\beta}$ e $b = \beta/3$ podemos concluir que

$$c_1 \leq \frac{1}{v(y)^2(1 + y^2)} \leq c_2.$$

Seja $[\boldsymbol{\eta}^n, \mathbf{u}^n]^T$ a solução do sistema discretizado. Temos que

$$\|[\boldsymbol{\eta}^n, \mathbf{u}^n]^T\|_{N,s,s+1}^2 = \frac{1}{2l} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} [1 + (k\pi/l)^2]^s \left\| A(k\pi/l) [\hat{\boldsymbol{\eta}}_k^n, \hat{\mathbf{u}}_k^n]^T \right\|_2^2,$$

onde

$$A(\kappa) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 + \kappa^2} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \left\| A(k\pi/l) [\hat{\boldsymbol{\eta}}_k^n, \hat{\mathbf{u}}_k^n]^T \right\|_2^2 &= \left\| A(k\pi/l) (G_k)^n [\hat{\boldsymbol{\eta}}_k^0, \hat{\mathbf{u}}_k^0]^T \right\|_2^2 \leq \\ &\leq \left\| A(k\pi/l) (G_k)^n A^{-1}(k\pi/l) \right\|_2^2 \left\| A(k\pi/l) [\hat{\boldsymbol{\eta}}_k^0, \hat{\mathbf{u}}_k^0]^T \right\|_2^2. \end{aligned}$$

$$\left\| A(k\pi/l) (G_k)^n A^{-1}(k\pi/l) \right\|_2^2 \leq \max\{1/c_1, c_2\} = C_s^2.$$

Logo,

$$\left\| A(k\pi/l) [\hat{\boldsymbol{\eta}}_k^n, \hat{\mathbf{u}}_k^n]^T \right\|_2^2 \leq C_s^2 \left\| A(k\pi/l) [\hat{\boldsymbol{\eta}}_k^0, \hat{\mathbf{u}}_k^0]^T \right\|_2^2,$$

Sob quais condições $|g^\pm(\theta_k, \sigma, \Delta x)| \leq 1$?

Teorema

Seja $\beta > 0$. Para que o modelo discreto seja estável basta que uma das seguintes condições seja verdadeira,

$$\sigma = \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \gamma_1 \sqrt{1 + \frac{\rho_2 \sqrt{\beta}}{\rho_1 \delta}}$$

$$\mu = \frac{\Delta t}{\sqrt{\Delta x}} \leq \gamma_2 \sqrt{\sqrt{\beta} \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}$$

$$\Delta t \leq \gamma_3 \sqrt{\frac{\beta}{3}}.$$

$$\gamma_1 = 2\sqrt{2} \left(\sup_{|\theta| \leq \pi} |\gamma(\theta)| \right)^{-1}, \quad \gamma_2 = 2\sqrt{2} \left(\sup_{|\theta| \leq \pi} \left\{ \frac{|\gamma(\theta)|}{\sqrt{|\theta|}} \right\} \right)^{-1}$$

$$\gamma_3 = 2\sqrt{2} \left(\sup_{|\theta| \leq \pi} \left\{ \frac{|\gamma(\theta)|}{|\theta|} \right\} \right)^{-1}$$

Lema

Sejam g_k^\pm os autovalores de G_k . Podemos escrever $|g^\pm|^2$ como

$$|g^\pm(\theta_k, \sigma, \Delta x)|^2 = 1 + p(y),$$

onde $p(y) = y^6(y^2 - 8)/576$ e $y = \sigma v(\frac{\theta}{\Delta x})\gamma(\theta)$.

- ▶ Se $p(\sigma v(\frac{\theta_k}{\Delta x})\gamma(\theta_k)) \leq 0$ então $|g_k^\pm| \leq 1$.
- ▶ $p(y) \leq 0$ se $|y| \leq 2\sqrt{2}$.
- ▶ Basta determinar quando

$$\sigma \left| v\left(\frac{\theta_k}{\Delta x}\right)\gamma(\theta_k) \right| \leq 2\sqrt{2}.$$

- ▶ Qual discretização espacial utilizar?
- ▶ Qual condição de estabilidade usar?

Escolha da discretização espacial

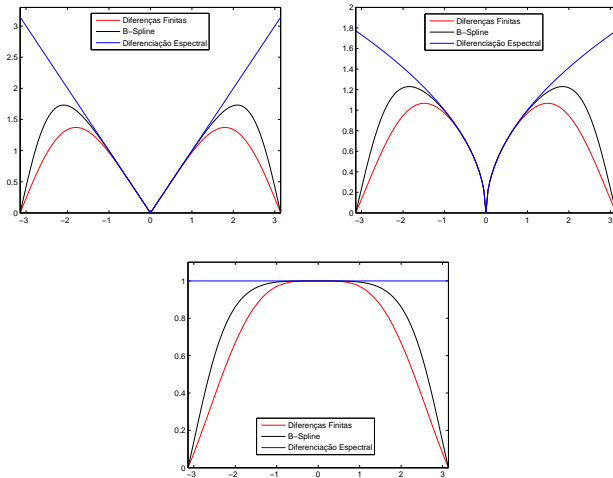


Figura: $|\gamma(\theta)|$, $|\gamma(\theta)|/\sqrt{|\theta|}$ e $|\gamma(\theta)|/|\theta|$ para cada discretização espacial com $\Delta\theta = \pi/40$.

Escolha da condição de estabilidade

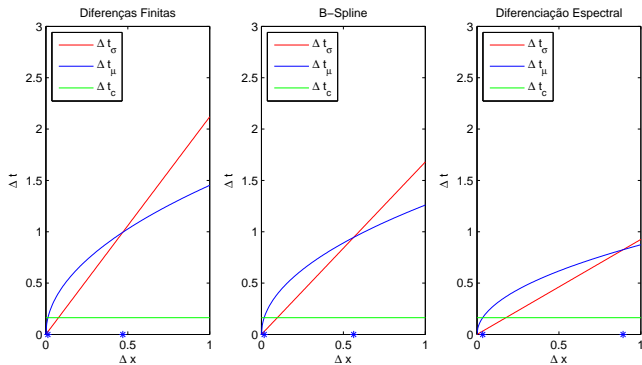


Figura: Δt_σ , Δt_μ e Δt_c em função de Δx .

Sejam as desigualdades

$$\Delta x < \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^2 \frac{\sqrt{\beta}(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 + \sqrt{\beta}\rho_2/\delta}, \quad (1)$$

$$\Delta x < \left(\frac{\gamma_3}{\gamma_2} \right)^2 \frac{\rho_1\beta/3}{\sqrt{\beta}(\rho_1 + \rho_2)}, \quad (2)$$

se (1) vale mas (2) não, usamos Δt_μ como passo temporal, se (2) vale então devemos usar Δt_c , caso contrário usamos Δt_σ .

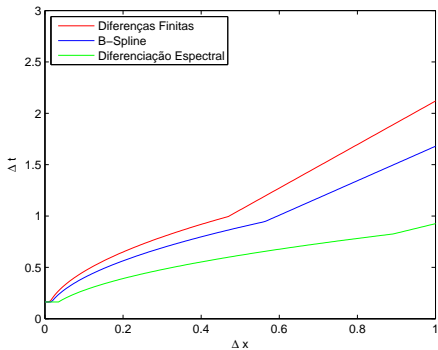


Figura: Δt máximo para cada discretização espacial em função de Δx .

Discretização do sistema fracamente não linear

As discretizações espacial e temporal do sistema fracamente não linear serão feitas como na versão linearizada.

$$\begin{cases} \eta_t &= E(\eta, u) \\ \psi_t &= F(\eta, u) \end{cases}$$

onde,

$$\begin{aligned} E(\eta, u) &= [(1 - \alpha\eta)u]_x, \\ F(\eta, u) &= \eta_x - \alpha uu_x, \\ \psi &= u - \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_{\delta, x}(u) - \frac{\beta}{3} u_{xx}. \end{aligned}$$

Para calcular u a partir de ψ usamos TFD definindo o operador $u = B(\psi)$ tal que

$$\hat{u}(k) = v(k\pi/l)^2 \hat{\psi}(k), \quad v(\kappa) = \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\sqrt{\beta}}{\delta} \phi(\kappa\delta) + \kappa^2 \frac{\beta}{3} \right)^{-1/2}.$$

As discretizações espacial e temporal serão feitas como na versão linearizada para η e ψ .

$$\begin{cases} \eta^{n+1} = \eta^n + \frac{\Delta t}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \\ \psi^{n+1} = \psi^n + \frac{\Delta t}{6}(KK_1 + 2KK_2 + 2KK_3 + KK_4), \end{cases}$$

onde,

$$\begin{aligned} K_1 &= E(\eta^n, \mathbf{u}^n), & KK_1 &= F(\eta^n, \mathbf{u}^n), \\ & & \mathbf{u}_{k1} &= B(\psi^n + 0.5\Delta t KK_1), \\ K_2 &= E(\eta^n + 0.5\Delta t K_1, \mathbf{u}_{k1}), & KK_2 &= F(\eta^n + 0.5\Delta t K_1, \mathbf{u}_{k1}), \\ & & \mathbf{u}_{k2} &= B(\psi^n + 0.5\Delta t KK_2), \\ K_3 &= E(\eta^n + 0.5\Delta t K_2, \mathbf{u}_{k2}), & KK_3 &= F(\eta^n + 0.5\Delta t K_2, \mathbf{u}_{k2}), \\ & & \mathbf{u}_{k3} &= B(\psi^n + 0.5\Delta t KK_3), \\ K_4 &= E(\eta^n + 0.5\Delta t K_3, \mathbf{u}_{k3}), & KK_4 &= F(\eta^n + 0.5\Delta t K_3, \mathbf{u}_{k3}). \end{aligned}$$

Perfil inicial de onda

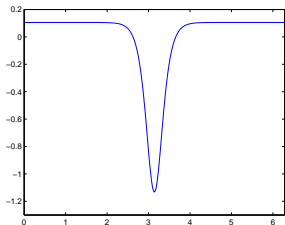
Como perfil inicial de onda vamos utilizar a solução obtida pelo método de Newton do sistema

$$\alpha \frac{3}{2} \tilde{\eta}^2 + \left[1 - \frac{1}{c^2} \right] \tilde{\eta} - \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta[\tilde{\eta}_y] - \frac{\beta}{3} \tilde{\eta}_{yy} = 0.$$

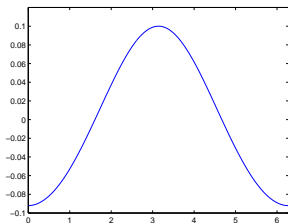
Este sistema surge de usar a mudança de variável $y = x - ct$, onde teremos as funções $\eta(x - ct, 0) = \tilde{\eta}(y)$ e $u(x - ct, 0) = \tilde{u}(y)$ e, em seguida transformando o sistema fracamente não linear em uma equação em $\tilde{\eta}$.

Como condição inicial do método de Newton usamos a onda viajante da equação ILW

$$\eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\sqrt{\beta}}{2} \mathcal{T}_\delta[\eta_{xx}] = 0,$$



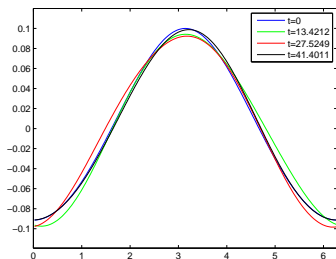
(a) Perfil inicial proveniente da equação ILW



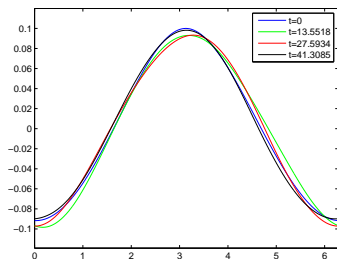
(b) Onda viajante obtida pelo método de Newton

Figura: Uso do método de Newton para obter uma onda viajante com $\alpha = \beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e $\Delta x = 0.0123$.

Resultados para o sistema linearizado



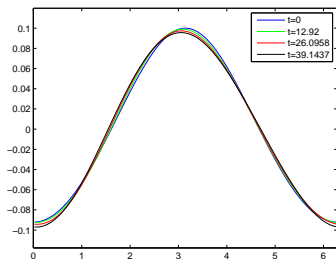
(a) $\Delta x = 0.0245$ e $\Delta t = 0.2275$



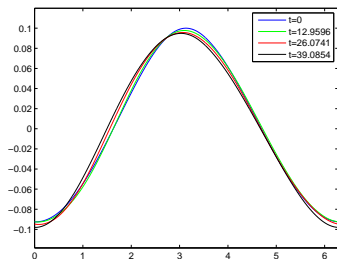
(b) $\Delta x = 0.0031$ e $\Delta t = 0.1633$

Figura: $\eta(x, t)$ com $\beta = 0.01$, $L = 1$, $\delta = 3.505$ e perfil inicial da ILW.

Resultados para o sistema linearizado



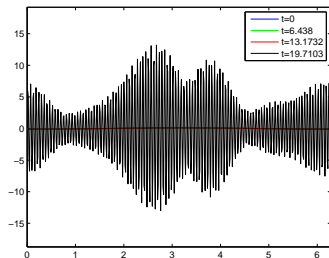
(a) $\Delta x = 0.0245$ e $\Delta t = 0.1279$



(b) $\Delta x = 0.0031$ e $\Delta t = 0.0516$

Figura: $\eta(x, t)$ com $\beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e perfil inicial da ILW.

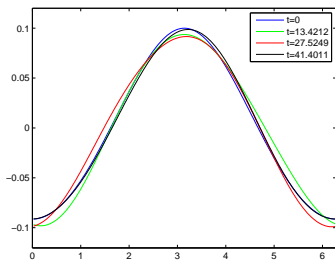
Resultados para o sistema linearizado



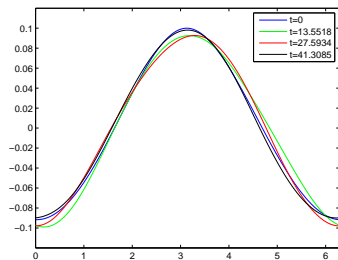
(a) Perfil inicial da ILW

Figura: $\eta(x, t)$ com $\beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$, $\Delta x = 0.0123$ e $\Delta t = 0.0990$.

Resultados para o sistema fracamente não linear



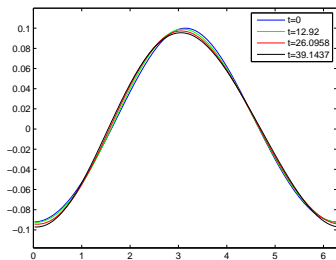
(a) $\Delta x = 0.0245$ e $\Delta t = 0.2275$



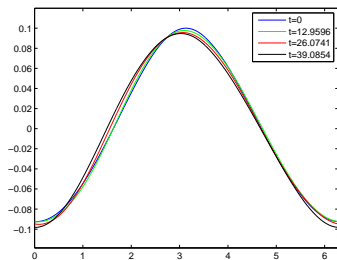
(b) $\Delta x = 0.0031$ e $\Delta t = 0.1633$

Figura: $\eta(x, t)$ com $\alpha = \beta = 0.01$, $L = 1$, $\delta = 3.505$ e perfil inicial da ILW.

Resultados para o sistema fracamente não linear



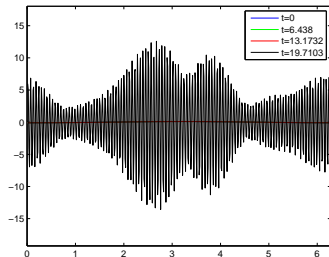
(a) $\Delta x = 0.0245$ e $\Delta t = 0.1279$



(b) $\Delta x = 0.0031$ e $\Delta t = 0.0516$

Figura: $\eta(x, t)$ com $\alpha = \beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$ e perfil inicial da ILW.

Resultados para o sistema fracamente não linear
















(a) Perfil inicial da ILW

Figura: $\eta(x, t)$ com $\alpha = \beta = 0.001$, $L = 3.1623$, $\delta = 1.1084$, $\Delta x = 0.0123$ e $\Delta t = 0.0990$.

Conclusões

- ▶ Provamos que o esquema numérico para o sistema linearizado é estável para escolhas adequadas de Δx e Δt .
- ▶ Encontramos três condições que garantem a estabilidade do esquema numérico.
- ▶ Experimentos mostraram que o esquema é estável computacionalmente dentro das condições estabelecidas.
- ▶ A versão deste esquema para o sistema fracamente não linear se mostrou estável quando usadas as mesmas condições.

-  U. Ascher. *Numerical methods for evolutionary differential equations*. SIAM, Philadelphia, 2008.
-  J. S. Brodzinski, Estudo de um modelo dispersivo não linear para ondas internas. Tese de Doutorado, UFPR, 2016.
-  R. Camassa, W. Choi, H. Michallet, P. O. Rupas e J. K. Sveen. On the realm of validity of strongly nonlinear asymptotic approximations for internal waves, *Journal of Fluid Mechanics*, 549: 1-23, 2006.
-  W. Choi e R. Camassa. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system, *Journal of Fluid Mechanics*, 396: 1-36, 1999.
-  R. Lório e V. Lório. *Equações diferenciais parciais: uma introdução*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
-  T. N. dos Santos, Ondas viajantes. Trabalho de conclusão de curso, UFPR, 2010.
-  G. Strang. *Introduction to Applied Mathematics*. Cambridge Press, Wellesley, 1986.

-  L. N. Trefethen. *Spectral methods in Matlab*. SIAM, Philadelphia, 2000.
-  D. G. A. Vigo, A. R. de Zárate, S. P. Oliveira e A. Nachbin. Fully discrete stability and dispersion analysis for a linear dispersive internal wave model, *Computational and Applied Mathematics*, 33: 203-221, 2014.
-  R. Vinchnevetesky e J. B. Bowles. *Fourier analysis of numerical approximations of hyperbolic equations*. SIAM, Philadelphia, 1982.
-  D. Vvedensky. *Partial Differential Equations with Mathematica*. Addison-Wesley, Reading, 1993.
-  A. R. de Zárate, Um modelo reduzido para ondas internas interagindo com estruturas submarinas a profundidades intermediárias. Tese de Doutorado, IMPA, 2007.
-  A. R. de Zárate, D. G. A. Vigo, A. Nachbin e W. Choi. A Higher-Order Internal Wave Model Accounting for Large

Bathymetric Variations, *Studies in Applied Mathematics*, 122:
275-294, 2009.