Propriedades de boa colocação para a equação ILWR e um sistema de tipo Boussinesq

Janaina Schoeffel
janainaschoeffel@ufpr.br

Docente no Setor de Educação Profissional - SEPT
Universidade Federal do Paraná - UFPR

06 de junho de 2017

Sumário

Ondas internas

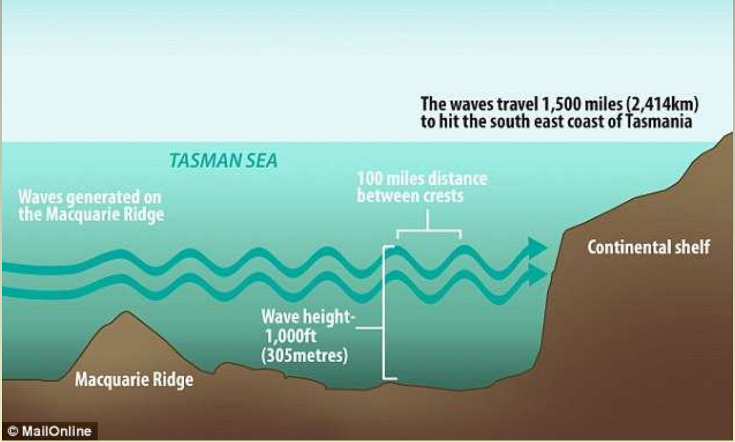


Figura: Esquema para ondas internas. Fonte: MailOnline: Science & Tech, 28/01/2015.

Ondas internas

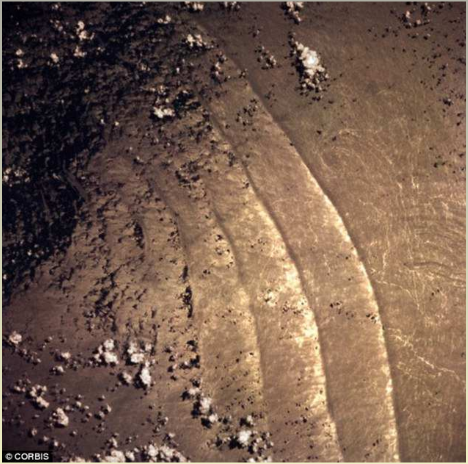


Figura: Ondas internas no oceano. Fonte: MailOnline: Science & Tech, 28/01/2015.

O modelo dispersivo não linear

$$\begin{cases} \eta_t - \left[(1-\alpha\eta)u\right]_x = 0 \\ u_t + \alpha u\, u_x - \eta_x = \sqrt{\beta}\,\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}\left[u_{xt}\right] + \dfrac{\beta}{3}u_{xxt}. \end{cases}$$

onde

$$\widehat{\mathcal{T}[f]}(k) = i\coth(kh)\hat{f}(k), \qquad k \neq 0, \qquad k \in \mathbb{R}\ (\text{ou } \mathbb{Z}).$$

No domínio físico, é a convolução com os núcleos:

$$T(x;h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2h}\coth\left(\frac{\pi}{2h}x\right), \qquad \text{ou}$$

$$T_{\text{per}}(x;h) = -\frac{2K}{\pi}\left[Z\left(\frac{Kx}{\pi}\right) + dn\left(\frac{Kx}{\pi}\right)cs\left(\frac{Kx}{\pi}\right)\right].$$

O modelo dispersivo não linear

$$\begin{cases} \eta_t - \left[(1-\alpha\eta)u\right]_x = 0 \\ u_t + \alpha u\, u_x - \eta_x = \sqrt{\beta}\,\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}\left[u_{xt}\right] + \dfrac{\beta}{3}u_{xxt}. \end{cases}$$

onde

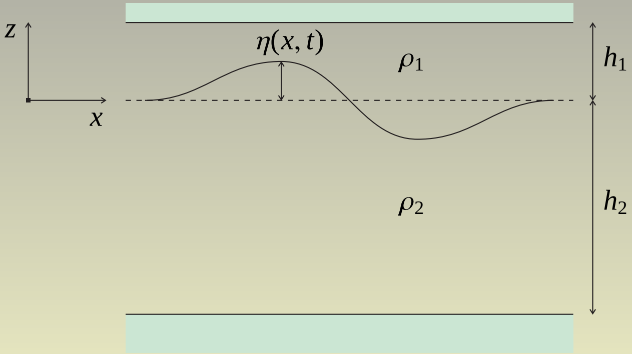
$$\widehat{\mathcal{T}[f]}(k) = i\coth(kh)\hat{f}(k), \qquad k \neq 0, \qquad k \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{Z}\text{)}.$$

No domínio físico, é a convolução com os núcleos:

$$T(x;h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2h}\coth\left(\frac{\pi}{2h}x\right), \qquad \text{ou}$$

$$T_{\text{per}}(x;h) = -\frac{2K}{\pi}\left[Z\left(\frac{Kx}{\pi}\right) + dn\left(\frac{Kx}{\pi}\right)cs\left(\frac{Kx}{\pi}\right)\right].$$

Esquema do modelo



$$\alpha = \frac{\tilde{a}}{h_1} \qquad \sqrt{\beta} = \frac{h_1}{L} \qquad h = \frac{h_2}{L}$$

Sobre o modelo e os espaços

Choi e Camassa (1999): sem o termo $\frac{\beta}{3}u_{xxt}$.

Zárate, Alfaro, Nachbin e Choi (2009): versão melhorada.

$$H^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R});\ \hat{f} \text{ é mensurável e } \|f\|_s < \infty \right\},$$

$$\|f\|_s = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| \hat{f}(k) \right|^2 dk \right]^{\frac{1}{2}}$$

Sobre o modelo e os espaços

Choi e Camassa (1999): sem o termo $\frac{\beta}{3}u_{xxt}$.

Zárate, Alfaro, Nachbin e Choi (2009): versão melhorada.

$$H^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R});\ \hat{f} \text{ é mensurável e } \|f\|_s < \infty \right\},$$

$$\|f\|_s = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| \hat{f}(k) \right|^2 dk \right]^{\frac{1}{2}}$$

Sumário

ILW × ILWR

Joseph (1977) $\rightarrow$

$$\text{ILW:} \qquad u_t + u_x - \frac{3}{2}\alpha u u_x - \sqrt{\beta}\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}[u_{xx}] = 0.$$

Abdelouhab, Bona, Felland, Saut (1989): H^s, $s > 3/2$.

Burq e Planchon (2008): H^s, $s > 1/4$.

$$\text{ILWR:} \qquad u_t + u_x - \frac{3}{2}\alpha u u_x - \sqrt{\beta}\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}[u_{xt}] = 0.$$

ILW $\times$ ILWR

Joseph (1977) $\rightarrow$

$$\text{ILW:} \qquad u_t + u_x - \frac{3}{2}\alpha u u_x - \sqrt{\beta}\,\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}[u_{xx}] = 0.$$

Abdelouhab, Bona, Felland, Saut (1989): H^s, $s > 3/2$.

Burq e Planchon (2008): H^s, $s > 1/4$.

$$\text{ILWR:} \qquad u_t + u_x - \frac{3}{2}\alpha u u_x - \sqrt{\beta}\,\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}[u_{xt}] = 0.$$

Velocidades de fase

$$A(k) = \begin{cases} 1 + \sqrt{\beta}\,\dfrac{\rho_2}{\rho_1} k \coth(kh), & \text{se } k \neq 0, \\ 1 + \dfrac{\sqrt{\beta}}{h}\dfrac{\rho_2}{\rho_1}, & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

ILW: $$\frac{\omega_{\text{nreg}}(k)}{k} = A(k) \xrightarrow{|k|\to\infty} \infty.$$

ILWR: $$\frac{\omega(k)}{k} = \frac{1}{A(k)} \xrightarrow{|k|\to\infty} 0.$$

Teorema 2.1.

O problema

$$\begin{cases} u \in C\left(\mathbb{R}, H^s(ou\ H^s_{per})\right) \\ u_t + u_x - \sqrt{\beta}\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}(u_{xt}) = 0 \ \ em\ H^s(ou\ H^s_{per}) \\ u(0) = \phi \ \ \in H^s(ou\ H^s_{per}), \end{cases}$$

$s \in \mathbb{R}$, é globalmente bem-posto. Sua única solução, que depende continuamente do dado inicial, é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left[e^{\frac{-ik}{A(k)}t}\,\widehat{\phi}(k)\right](x), \ \textit{no caso não periódico, e}$$

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{\frac{-ik}{A(k)}t}\,\widehat{\phi}(k)\right](x), \ \textit{no caso periódico.}$$

Boa colocação equação não linear

Teorema 2.2.

Sejam $s > \frac{1}{2}$ *e* $\phi \in H^s$. *Então existe* $T = T(s, \|\phi\|_s) > 0$ *tal que o problema de Cauchy não linear*

$$\begin{cases} u \in C\left([-T,T], H^s\ (ou\ H^s_{per})\right) \\ u_t + u_x - \dfrac{3}{2}\alpha u u_x - \sqrt{\beta}\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}(u_{xt}) = 0 \ \ em\ H^s\ (ou\ H^s_{per}) \\ u(0) = \phi \ \ \in H^s\ (ou\ H^s_{per}), \end{cases}$$

é localmente bem-posto.

Definição.

Sejam X, Y espaços de Banach e $F : Y \to X$ uma função contínua. Diz-se que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t(t) = F(u(t)) & \in X \\ u(0) = \phi & \in Y, \end{cases}$$

é localmente bem-posto em Y se

(a) $\exists\ T > 0$ e uma função $u \in C([-T, T]; Y)$ tal que $u(0) = \phi$ e a equação diferencial é satisfeita no seguinte sentido

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - F(t, u(t)) \right\|_X = 0;$$

Definição de boa colocação

Definição.

(b) o problema de Cauchy tem no máximo uma solução em $C\left([-T,T];Y\right)$;

(c) e o mapa $\phi \longmapsto u$ é contínuo.
Mais precisamente, sejam $\phi^*, \phi_n \in Y$, $n = 1, 2, \ldots$, tais que $\phi_n \xrightarrow{Y} \phi^*$ e $u^* \in C\left([-T^*,T^*];Y\right)$, u_n as soluções correspondentes. Então, $\forall$ n suficientemente grande, as soluções u_n podem ser estendidas para o intervalo $[-T^*,T^*]$ e vale

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[-T^*,T^*]} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_Y = 0.$$

Demonstração:

Equação integral: $$u(t) = \phi - \int_0^t G\left(\frac{3}{4}\alpha u^2(\tau) - u(\tau)\right)\,d\tau.$$

$$\begin{aligned} J : \quad \Lambda &\longrightarrow \quad \Lambda \\ v &\longmapsto \quad Jv : [-T, T] \longrightarrow H^s_{\text{per}} \ (\text{ou } H^s_{\text{per}}), \end{aligned}$$

$$Jv(t) = \phi - \int_0^t G\left(\frac{3}{4}\alpha v^2(\tau) - v(\tau)\right)\,d\tau.$$

Teorema 2.3 (Teorema do Ponto Fixo de Banach).

Seja (Λ, d) um espaço métrico completo e suponha que $J : \Lambda \to \Lambda$ é uma contração estrita. Então J tem um único ponto fixo, isto é, existe um único $x_0 \in \Lambda$ tal que $J(x_0) = x_0$.

Demonstração:

Equação integral: $$u(t) = \phi - \int_0^t G\left(\frac{3}{4}\alpha u^2(\tau) - u(\tau)\right) d\tau.$$

$$\begin{aligned} J: \quad \Lambda &\longrightarrow \quad \Lambda \\ v &\longmapsto \quad Jv : [-T, T] \longrightarrow H^s_{per} \text{ (ou } H^s_{per}), \end{aligned}$$

$$Jv(t) = \phi - \int_0^t G\left(\frac{3}{4}\alpha v^2(\tau) - v(\tau)\right) d\tau.$$

Teorema 2.3 (Teorema do Ponto Fixo de Banach).

Seja (Λ, d) um espaço métrico completo e suponha que $J : \Lambda \to \Lambda$ é uma contração estrita. Então J tem um único ponto fixo, isto é, existe um único $x_0 \in \Lambda$ tal que $J(x_0) = x_0$.

$$\Lambda = \Lambda(T, R, \phi) = \left\{ v \in C([-T, T]; H^s \text{ (ou } H^s_{\text{per}})); \; d(v, \Phi) \leqslant R \right\}.$$

$$T = \min\left\{ T_1, T_2 \right\},$$

$$T_1 = \sqrt{\beta}\,\frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{R}{R + \|\phi\|_s}\right)\left(\frac{1}{\frac{3}{4}\alpha C_s(R + \|\phi\|_s) + 1}\right),$$

$$T_2 = \sqrt{\beta}\,\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{1}{C_s\left(\frac{3}{2}\alpha\left(R + \|\phi\|_s\right) + 1\right)}.$$

$$\Lambda = \Lambda(T, R, \phi) = \left\{ v \in C([-T, T]; H^s \ (\text{ou } H^s_{\text{per}})); \ d(v, \Phi) \leqslant R \right\}.$$

$$T = \min \left\{ T_1, T_2 \right\},$$

$$T_1 = \sqrt{\beta}\,\frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{R}{R + \|\phi\|_s} \right) \left(\frac{1}{\frac{3}{4}\alpha C_s (R + \|\phi\|_s) + 1} \right),$$

$$T_2 = \sqrt{\beta}\,\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{1}{C_s \left(\frac{3}{2}\alpha \left(R + \|\phi\|_s \right) + 1 \right)}.$$

(a) Existência de solução

$$\exists!\ v \in \Lambda \text{ tal que } v(t) = \phi - \int_0^t G * \left(\frac{3}{4} \alpha v^2(\tau) - v(\tau) \right) d\tau$$

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \widetilde{G} * (v(t)) \right\|_s = 0.$$

(a) Existência de solução

$$\exists!\ v \in \Lambda \text{ tal que } v(t) = \phi - \int_0^t G * \left(\frac{3}{4}\alpha v^2(\tau) - v(\tau) \right) d\tau$$

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \widetilde{G} * (v(t)) \right\|_s = 0.$$

(b) Unicidade

$$\begin{cases} v_i \in C([-T_{\|\phi_i\|_s}, T_{\|\phi_i\|_s}]; H^s \text{ (ou } H^s_{\text{per}})) \\ v_{it} = \widetilde{G} * v_i \text{ em } H^s \text{ (ou } H^s_{\text{per}}) \\ v_i(0) = \phi_i \in H^s \text{ (ou } H^s_{\text{per}}), \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Desigualdade de Gronwall $\Rightarrow$

$$\|v_1(t) - v_2(t)\|_s \leqslant \|\phi_1 - \phi_2\|_s e^{\widetilde{\beta}|t|}, \quad \forall\, t \in [-T, T],$$

onde $T = \min\left\{T_{\|\phi_1\|_s},\ T_{\|\phi_2\|_s}\right\}$ e

$$\widetilde{\beta} = C_s \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta}\rho_2}\left(\frac{3}{4}\alpha\left(2R + \|\phi_1\|_s + \|\phi_2\|_s\right) + 1\right), \text{se } t \in [-T, 0].$$

(b) Unicidade

$$\begin{cases} v_i \in C([-T_{\|\phi_i\|_s}, T_{\|\phi_i\|_s}]; H^s \text{ (ou } H^s_{\text{per}})) \\ v_{it} = \widetilde{G} * v_i \ \text{ em } H^s \text{ (ou } H^s_{\text{per}}) \\ v_i(0) = \phi_i \ \in H^s \text{ (ou } H^s_{\text{per}}), \qquad i = 1, 2. \end{cases}$$

Desigualdade de Gronwall $\Rightarrow$

$$\|v_1(t) - v_2(t)\|_s \leqslant \|\phi_1 - \phi_2\|_s e^{\widetilde{\beta}\,|t|}, \qquad \forall\, t \in [-T, T],$$

onde $T = \min\left\{T_{\|\phi_1\|_s},\ T_{\|\phi_2\|_s}\right\}$ e

$$\widetilde{\beta} = C_s \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta}\,\rho_2}\left(\frac{3}{4}\alpha\,(2R + \|\phi_1\|_s + \|\phi_2\|_s) + 1\right), \text{se } t \in [-T, 0].$$

(c) Dependência contínua dos dados iniciais

$$\|v_n(t) - v^*(t)\|_s \leqslant \frac{C_0\|\phi_n - \phi^*\|_s \, e^{C_0\,|t|}}{C_0 + C_1\|\phi_n - \phi^*\|_s \, \left(1 - e^{C_0\,|t|}\right)},$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[-T,T]} \|v_n(t) - v^*(t)\|_s = 0.$$

$\blacksquare$

(c) Dependência contínua dos dados iniciais

$$\|v_n(t) - v^*(t)\|_s \leqslant \frac{C_0 \|\phi_n - \phi^*\|_s \, e^{C_0 |t|}}{C_0 + C_1 \|\phi_n - \phi^*\|_s \, \left(1 - e^{C_0 |t|}\right)},$$

Portanto

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{[-T,T]} \|v_n(t) - v^*(t)\|_s = 0.$$

$\blacksquare$

Teorema 2.4.

Sejam $s > \frac{1}{2}$ *e* $\phi \in H^s$. *Então o problema de Cauchy não linear*

$$\begin{cases} u \in C\left(\mathbb{R}, H^s \ (ou\ H^s_{per})\right) \\ u_t + u_x - \dfrac{3}{2}\alpha u u_x - \sqrt{\beta}\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}(u_{xt}) = 0 \ \ em\ H^s \ (ou\ H^s_{per}) \\ u(0) = \phi \ \ \in H^s \ (ou\ H^s_{per}), \end{cases}$$

é globalmente bem-posto.

Demonstração:

Lema 2.5.

Se u satisfaz a equação ILWR no sentido das distribuições e $u \in C([-T,T],H^s)$ para algum $s > \frac{1}{2}$, então $\forall\ t \in [-T,T]$ a seguinte norma é preservada:

$$|||u(t)|||_{\frac{1}{2}} = |||\phi|||_{\frac{1}{2}},$$

onde

$$|||f|||_{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\left|\hat{f}(k)\right|^2 dk\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração:

$$\|u(t)\|_s \leqslant \|\phi\|_s + \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta}\rho_2}\left|\int_0^t \|u\|_s + \frac{3}{2}\alpha C_s \|u\|_\infty \|u\|_s \, d\tau\right|$$

Lema 2.6 (Estimativa do tipo Brezis-Gallouet).

$$u \in H^s,\ s > \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \|u\|_\infty \leqslant C\left(1 + \sqrt{\log\left(1 + \|u\|_s\right)}\right)\|u\|_{\frac{1}{2}}$$

$$\|\eta(t)\|_s \leqslant \|\phi\|_s + C_0\left|\int_0^t \left(2 + \sqrt{\log\left(1 + \|\eta\|_s\right)}\right)\|\eta\|_s \, d\tau\right|,$$

$$\Rightarrow \quad \|\eta(t)\|_s \leqslant e^{C_1 e^{3C_0 t}},$$

$C_0 = C_0\left(\|\phi\|_{\frac{1}{2}}\right)$ e $C_1 = 1 + \log(1 + \|\phi\|_s)$.

Demonstração:

$$\|u(t)\|_s \leqslant \|\phi\|_s + \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta\rho_2}}\left|\int_0^t \|u\|_s + \frac{3}{2}\alpha C_s \|u\|_\infty \|u\|_s \, d\tau\right|$$

Lema 2.6 (Estimativa do tipo Brezis-Gallouet).

$$u \in H^s,\ s > \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \|u\|_\infty \leqslant C\left(1 + \sqrt{\log\left(1 + \|u\|_s\right)}\right)\|u\|_{\frac{1}{2}}$$

$$\|\eta(t)\|_s \leqslant \|\phi\|_s + C_0\left|\int_0^t \left(2 + \sqrt{\log\left(1 + \|\eta\|_s\right)}\right)\|\eta\|_s \, d\tau\right|,$$

$$\Rightarrow \quad \|\eta(t)\|_s \leqslant e^{C_1 e^{3C_0 t}},$$

$C_0 = C_0\left(\|\phi\|_{\frac{1}{2}}\right)$ e $C_1 = 1 + \log(1 + \|\phi\|_s)$.

Demonstração:

$$\|u(t)\|_s \leqslant \|\phi\|_s + \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta}\rho_2}\left|\int_0^t \|u\|_s + \frac{3}{2}\alpha C_s \|u\|_\infty \|u\|_s \, d\tau\right|$$

Lema 2.6 (Estimativa do tipo Brezis-Gallouet).

$$u \in H^s,\ s > \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \|u\|_\infty \leqslant C\left(1 + \sqrt{\log\left(1 + \|u\|_s\right)}\right)\|u\|_{\frac{1}{2}}$$

$$\|\eta(t)\|_s \leqslant \|\phi\|_s + C_0\left|\int_0^t \left(2 + \sqrt{\log\left(1 + \|\eta\|_s\right)}\right)\|\eta\|_s \, d\tau\right|,$$

$$\Rightarrow \quad \|\eta(t)\|_s \leqslant e^{C_1 e^{3C_0 t}},$$

$C_0 = C_0\left(\|\phi\|_{\frac{1}{2}}\right)$ e $C_1 = 1 + \log(1 + \|\phi\|_s)$.

Demonstração:

$$\|u(t)\|_s \leqslant \|\phi\|_s + \frac{\rho_1}{\sqrt{\beta}\rho_2} \left| \int_0^t \|u\|_s + \frac{3}{2}\alpha C_s \|u\|_\infty \|u\|_s \, d\tau \right|$$

Lema 2.6 (Estimativa do tipo Brezis-Gallouet).

$$u \in H^s, \ s > \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \|u\|_\infty \leqslant C \left(1 + \sqrt{\log(1 + \|u\|_s)}\right) \|u\|_{\frac{1}{2}}$$

$$\|\eta(t)\|_s \leqslant \|\phi\|_s + C_0 \left| \int_0^t \left(2 + \sqrt{\log(1 + \|\eta\|_s)}\right) \|\eta\|_s \, d\tau \right|,$$

$$\Rightarrow \quad \|\eta(t)\|_s \leqslant e^{C_1 e^{3C_0 t}},$$

$C_0 = C_0\left(\|\phi\|_{\frac{1}{2}}\right)$ e $C_1 = 1 + \log(1 + \|\phi\|_s)$. ∎

Sumário

O sistema linearizado

Sistema linearizado:

$$\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \eta_t - u_x = 0 \\ u_t - \eta_x = b\mathcal{T}\left[u_{xt}\right] + a\,u_{xxt}, \end{cases}$$

Observação.

Equação da onda:

$$\alpha = \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \eta_t - u_x = 0 \\ u_t - \eta_x = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \eta_{xx} - \eta_{tt} = 0.$$

Boa colocação sistema linearizado

Teorema 3.1.

O problema de Cauchy

$$\begin{cases} (\eta, u) \in C\left(\mathbb{R}, H^s_{per} \times H^{s+1}_{per}\right) \\ \eta_t - u_x = 0, \qquad em \;\; H^s_{per} \times H^{s+1}_{per} \\ u_t - \eta_x = b\,\mathcal{T}\left[u_{xt}\right] + a\, u_{xxt}, \qquad em \;\; H^s_{per} \times H^{s+1}_{per} \\ \left(\eta(0), u(0)\right) = (\phi, \psi) \;\in H^s_{per} \times H^{s+1}_{per}, \end{cases}$$

$s \in \mathbb{R}$, é globalmente bem-posto. Sua única solução, que depende continuamente do dado inicial, é dada por

$$\begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}(x,t) = \begin{pmatrix} \widehat{\phi}(k)\cos\left(\frac{k\,t}{\sqrt{\widetilde{A}(k)}}\right) + i\sqrt{\widetilde{A}(k)}\,\widehat{\psi}(k)\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\,t}{\sqrt{\widetilde{A}(k)}}\right) \\ \widehat{\psi}(k)\cos\left(\frac{k\,t}{\sqrt{\widetilde{A}(k)}}\right) + i\frac{1}{\sqrt{\widetilde{A}(k)}}\widehat{\phi}(k)\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\,t}{\sqrt{\widetilde{A}(k)}}\right) \end{pmatrix}^{\vee}(x).$$

Introdução

A equação ILW Regularizada

O sistema do tipo Boussinesq para ondas intermediárias

Demonstração:

$$\begin{cases} \eta_t - u_x = 0, \\ u_t - \eta_x = b\,\mathcal{T}\,[u_{xt}] + a\,u_{xxt}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad U_t(t) = \mathcal{G}U(t),$$

onde $\widehat{\mathcal{G}U}(k) = M(k)\hat{U}(k) = \begin{pmatrix} 0 & ik \\ -\tilde{m}(k) & 0 \end{pmatrix} \hat{U}(k),$

$$\tilde{m}(k) = \frac{-ik}{\tilde{A}(k)} \quad \text{e} \quad U = \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}.$$

Lema 3.2.

$$s \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{G} \in \mathcal{B}(H^s_{per} \times H^{s+1}_{per}) \quad e$$

$$\|\mathcal{G}U\|_{s,\tilde{s}} \leqslant \frac{1}{C_1(h)} \|U\|_{s,\tilde{s}}.$$

Demonstração:

$$\begin{cases} \eta_t - u_x = 0, \\ u_t - \eta_x = b\,\mathcal{T}\left[u_{xt}\right] + a\,u_{xxt}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad U_t(t) = \mathcal{G}U(t),$$

onde $$\widehat{\mathcal{G}U}(k) = M(k)\hat{U}(k) = \begin{pmatrix} 0 & ik \\ -\tilde{m}(k) & 0 \end{pmatrix} \hat{U}(k),$$

$$\tilde{m}(k) = \frac{-ik}{\tilde{A}(k)} \quad \text{e} \quad U = \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}.$$

Lema 3.2.

$$s \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{G} \in \mathcal{B}(H^s_{per} \times H^{s+1}_{per}) \quad e$$

$$\|\mathcal{G}U\|_{s,\tilde{s}} \leq \frac{1}{C_1(h)} \|U\|_{s,\tilde{s}}.$$

Demonstração:

$$\begin{cases} \eta_t - u_x = 0, \\ u_t - \eta_x = b\,\mathcal{T}\left[u_{xt}\right] + a\, u_{xxt}, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad U_t(t) = \mathcal{G}U(t),$$

onde $\widehat{\mathcal{G}U}(k) = M(k)\hat{U}(k) = \begin{pmatrix} 0 & ik \\ -\tilde{m}(k) & 0 \end{pmatrix} \hat{U}(k),$

$$\tilde{m}(k) = \frac{-ik}{\tilde{A}(k)} \quad \text{e} \quad U = \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}.$$

Lema 3.2.

$$s \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{G} \in \mathcal{B}(H^s_{per} \times H^{s+1}_{per}) \qquad e$$

$$\|\mathcal{G}U\|_{s,\tilde{s}} \leqslant \frac{1}{C_1(h)} \|U\|_{s,\tilde{s}}.$$

Na literatura: dispersão em ambas as equações

2006 - Alazman, Albert, Bona, Chen e Wu
(estudo analítico e numérico, modela ondas de superfície)

$$\begin{cases} \eta_t + u_x + \epsilon(\eta\, u)_x = \dfrac{1}{6}\epsilon\eta_{xxt} \\ u_t + \eta_x + \epsilon u\, u_x = \dfrac{1}{6}\epsilon u_{xxt}. \end{cases}$$

2014 - Grajales
(garante a existência local de soluções)

$$\begin{cases} \eta_t - ((1-\alpha\eta)u)_x = \dfrac{\epsilon^2}{6}\eta_{xxt} \\ u_t + \alpha u\, u_x + \left(1 - \dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)\eta_x = \dfrac{\rho_2}{\rho_1}\epsilon\mathcal{H}(u_{xt}) + \dfrac{\epsilon^2}{6}u_{xxt}, \end{cases}$$

Na literatura: dispersão em ambas as equações

2006 - Alazman, Albert, Bona, Chen e Wu
(estudo analítico e numérico, modela ondas de superfície)

$$\begin{cases} \eta_t + u_x + \epsilon(\eta\, u)_x = \dfrac{1}{6}\epsilon\eta_{xxt} \\ u_t + \eta_x + \epsilon u\, u_x = \dfrac{1}{6}\epsilon u_{xxt}. \end{cases}$$

2014 - Grajales
(garante a existência local de soluções)

$$\begin{cases} \eta_t - ((1-\alpha\eta)u)_x = \dfrac{\epsilon^2}{6}\eta_{xxt} \\ u_t + \alpha u\, u_x + \left(1 - \dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)\eta_x = \dfrac{\rho_2}{\rho_1}\epsilon\mathcal{H}(u_{xt}) + \dfrac{\epsilon^2}{6}u_{xxt}, \end{cases}$$

Na literatura

Introdução
A equação ILW Regularizada
O sistema do tipo Boussinesq para ondas intermediárias

2012 - Li Xu
(termo dispersivo apenas na primeira equação)

$$\begin{cases} \eta_t + \rho\big[(1-\alpha\eta)u\big]_x + [\theta b\, k \coth(hk)\widehat{\eta}_t]^{\check{}} + \\ \qquad\qquad [(\theta-1)\rho\, b\, k \coth(hk)\widehat{u}_x]^{\check{}} = 0 \\ u_t - \alpha\rho\, u\, u_x + (1-\rho)\,\eta_x = 0. \end{cases}$$

2002 e 2004 - Bona, Chen e Saut

1981 - Schonbeck
(existência e unicidade local, sistema original de Boussinesq)

$$\begin{cases} \eta_t + u_x + (u\eta)_x = 0 \\ u_t + \eta_x + u\, u_x - u_{xxt} = 0. \end{cases}$$

Na literatura

2012 - Li Xu
(termo dispersivo apenas na primeira equação)

$$\begin{cases} \eta_t + \rho\big[(1-\alpha\eta)u\big]_x + \big[\theta b\, k \coth(hk)\widehat{\eta}_t\big]^{\check{}} + \\ \qquad\qquad \big[(\theta-1)\rho\, b\, k \coth(hk)\widehat{u}_x\big]^{\check{}} = 0 \\ u_t - \alpha\rho\, u\, u_x + (1-\rho)\,\eta_x = 0. \end{cases}$$

2002 e 2004 - Bona, Chen e Saut

1981 - Schonbeck
(existência e unicidade local, sistema original de Boussinesq)

$$\begin{cases} \eta_t + u_x + (u\eta)_x = 0 \\ u_t + \eta_x + u\, u_x - u_{xxt} = 0. \end{cases}$$

Na literatura

2012 - Li Xu
(termo dispersivo apenas na primeira equação)

$$\begin{cases} \eta_t + \rho\big[(1-\alpha\eta)u\big]_x + \big[\theta b\, k \coth(hk)\widehat{\eta}_t\big]^{\vee} + \\ \qquad\qquad\qquad \big[(\theta-1)\rho\, b\, k \coth(hk)\widehat{u}_x\big]^{\vee} = 0 \\ u_t - \alpha\rho\, u\, u_x + (1-\rho)\,\eta_x = 0. \end{cases}$$

2002 e 2004 - Bona, Chen e Saut

1981 - Schonbeck
(existência e unicidade local, sistema original de Boussinesq)

$$\begin{cases} \eta_t + u_x + (u\eta)_x = 0 \\ u_t + \eta_x + u\, u_x - u_{xxt} = 0. \end{cases}$$

Propriedades de $\mathcal{T}$

Lema 3.3.

Sejam f e g funções a valores reais. Então

$$\langle f, \mathcal{T}[g] \rangle_s = -\langle g, \mathcal{T}[f] \rangle_s \quad e \quad \langle f, \mathcal{T}[f] \rangle_s = 0,$$

$\forall\ s \in \mathbb{R}$, *sempre que o produto interno fizer sentido.*

Lema 3.4.

$$\langle \mathcal{T}[f], f_x \rangle_s \geqslant 0,$$

$\forall\ s \in \mathbb{R}$, *sempre que o produto interno fizer sentido.*

Leis de Conservação

Introdução

A equação ILW Regularizada

O sistema do tipo Boussinesq para ondas intermediárias

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx, \qquad \text{e}$$

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(0),$$

onde

$$\mathcal{L}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2}{2}dx + \frac{b}{2}\int_{-\infty}^{\infty} v_x \mathcal{T}[v]dx + \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_0(\omega,1),$$

$$\sigma_0(\omega,1) = \omega\log\omega - \omega + 1,$$

$$\omega = 1 - \alpha\eta, \qquad v = \alpha u.$$

Leis de Conservação

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx, \qquad \text{e}$$

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(0),$$

onde

$$\mathcal{L}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2}{2}dx + \frac{b}{2}\int_{-\infty}^{\infty} v_x \mathcal{T}[v]dx + \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_0(\omega,1),$$

$$\sigma_0(\omega,1) = \omega\log\omega - \omega + 1,$$

$$\omega = 1 - \alpha\eta, \qquad v = \alpha u.$$

Sistema com regularização parabólica

$$\begin{cases} \eta_t - \left[(1-\alpha\eta)u\right]_x = \epsilon\eta_{xx}, \\ \\ u_t + \alpha u\, u_x - \eta_x = b\,\mathcal{T}\left[u_{xt}\right] + a\, u_{xxt}, \qquad \epsilon > 0. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}(t) \leqslant \mathcal{L}(0),$$

onde

$$\mathcal{L}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2}{2}dx + \frac{b}{2}\int_{-\infty}^{\infty} v_x\mathcal{T}[v]dx + \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_0(\omega,1).$$

Sistema com regularização parabólica

$$\begin{cases} \eta_t - [(1-\alpha\eta)u]_x = \epsilon\eta_{xx}, \\ u_t + \alpha u\, u_x - \eta_x = b\,\mathcal{T}[u_{xt}] + a\, u_{xxt}, \qquad \epsilon > 0. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}(t) \leqslant \mathcal{L}(0),$$

onde

$$\mathcal{L}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2}{2}dx + \frac{b}{2}\int_{-\infty}^{\infty} v_x \mathcal{T}[v]dx + \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_0(\omega, 1).$$

Existência de solução (sist. regularizado)

Seguindo o que fez Iório (1986) para BO:

Teorema 3.5.

Sejam $s > \frac{1}{2}$, $\epsilon > 0$ *e* $(\phi, \psi) \in H^{s+1} \times H^{s+1}$. *Então existe* $T_{\epsilon,s} = T\left(s, \|\phi\|_{s+1}, \|\psi\|_{s+1}, \epsilon\right) > 0$ *tal que, para cada* ϵ, *o problema de Cauchy não linear*

$$\begin{cases} (\eta, u) \in C\left([0, T_{\epsilon,s}], H^{s+1} \times H^{s+1}\right) \\ \eta_t - [(1-\alpha\eta)u]_x = \epsilon\eta_{xx}, \quad \text{em } H^{s-1} \times H^{s-1} \\ u_t + \alpha u\, u_x - \eta_x = b\,\mathcal{T}\left[u_{xt}\right] + a\, u_{xxt}, \quad \text{em } H^{s-1} \times H^{s-1} \\ (\eta(0), u(0)) = (\phi, \psi) \in H^{s+1} \times H^{s+1}, \end{cases} \tag{1}$$

possui uma solução local $(\eta_\epsilon, u_\epsilon)$, *no sentido forte.*

Demonstração: Formulação integral

$$\begin{cases} \eta(t,x) = \left(K_\epsilon(t) * \phi\right)(x) + \displaystyle\int_0^t \left(\frac{d}{dx} K_\epsilon(t-\tau) * \left(u - \alpha \eta u\right)(\tau) \right)(x)\, d\tau \\ u(t,x) = \psi(x) - \displaystyle\int_0^t \left[\tilde{G} * \left(\eta - \alpha \frac{u^2}{2} \right)(\tau) \right](x) d\tau, \end{cases}$$

onde $K_\epsilon(t,x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon t}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon t}}$ e $\mathcal{F}\left(\tilde{G} * f\right)(k) = \tilde{m}(k)\hat{f}(k).$

Extensão das soluções

Teorema 3.6.

Nas condições do teorema anterior seja, para cada $\epsilon > 0$, $(\eta_\epsilon, u_\epsilon)$ *uma solução do problema de Cauchy (1). Então* $(\eta_\epsilon, u_\epsilon)$ *pode ser definida em um intervalo* $[0, T_s]$, $T_s = T(s, \|\phi\|_{s+1}, \|\psi\|_{s+1}) > 0$ *independente de* ϵ. *Além disso existem* $\rho \in C\left([0, T_s], \mathbb{R}\right)$ *e* $C_1(h) > 0$ *tais que*

$$\|\eta_\epsilon(t)\|_s^2 + \|u_\epsilon(t)\|_s^2 + C_1(h)\|u_\epsilon\|_{s+1}^2 \leqslant \rho(t),$$

$$\rho(0) = \|\phi\|_s^2 + \|\psi\|_s^2 + C_1(h)\|\psi\|_{s+1}^2, \qquad \forall\ t \in [0, T_s].$$

Teorema 3.7.

Sejam $s > \frac{3}{2}$ *e* $(\phi, \psi) \in H^{s+1} \times H^{s+1}$ *funções a valores reais. Então existe* $T_s = T\left(s, \|\phi\|_{s+1}, \|\psi\|_{s+1}\right) > 0$ *tal que o problema de Cauchy não linear*

$$\begin{cases} (\eta, u) \in C\left([0, T_s], H^s \times H^{s+1}\right) \\ \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = 0, \quad em\ H^{s-2} \times H^{s-1} \\ u_t + \alpha u\, u_x - \eta_x = b\mathcal{T}[u_{xt}] + a\, u_{xxt}, \quad em\ H^{s-2} \times H^{s-1} \\ (\eta(0), u(0)) = (\phi, \psi) \in H^{s+1} \times H^{s+1}, \end{cases}$$

possui uma única solução local.

Demonstração:

- *
$$\lim_{\epsilon \to 0} (\eta_\epsilon(t), u_\epsilon(t)) = (\eta_0(t), u_0(t))$$
existe em $H^{s-1} \times H^s$ uniformemente sobre $[0, T_s]$,

- * Desigualdade de Gronwall $\Rightarrow$ unicidade,

- *
$$(\eta_0, u_0) \in C\left([0, T_s], H^s \times H^{s+1}\right)$$
e satisfaz a equação em $H^{s-2} \times H^{s-1}$.

$\blacksquare$

Referências Bibliográficas

W. Choi e R. Camassa: *Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system.* Journal of Fluid Mechanics, 396: 01-36, 1999.

A. Ruiz de Zárate, D. G. Alfaro, A. Nachbin e W. Choi: *A Higher-Order Internal Wave Model Accounting for Large Bathymetric Variations.* Studies in Applied Mathematics, 122: 275-294, 2009.

R. J. Iório Jr.: *On the Cauchy Problem for the Benjamin-Ono Equation.* Communications in Partial Differential Equations, 11(10): 1031-1081, 1986.

M.E. Schonbek: *Existence of Solutions for the Boussinesq System of Equations.* Journal of Differential Equations, 42: 325-352, 1981.

Obrigada

Obrigada pela atenção!