Universidade Federal do Paraná

Um pouco sobre Funções Analíticas Generalizadas

Paulo L. Dattori da Silva
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo

08 de dezembro de 2017

Sejam Ω um aberto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função complexa. Se existir o limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

esse limite é chamado *derivada* de f no ponto z_0 e é denotado por $f'(z_0)$

Condições de Cauchy-Riemann

$z = x + iy$

Se a função $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ tem derivada no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ então

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

já eram conhecidas por Jean le Rond d'Alembert em 1752; 37 anos antes do nascimento de Cauchy

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = u\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right)$$

Pela regra da cadeia

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial u}{\partial y} + i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

ou ainda,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial u}{\partial y} + i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv)$$

Logo, as condições de Cauchy-Riemann podem ser rescritas na forma

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0.$$

O operador

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

é chamado operador de Cauchy-Riemann.

Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa em Ω se

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = 0, \quad \text{para todo} \quad z \in \Omega.$$

Voltando ao sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} & = & 0 \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} & = & 0 \end{cases}$$

O sistema de equações acima tem a forma geral

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} + au + bv & = & f \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + cu + dv & = & g \end{cases}$$

Podemos reescrever o sistema acima na forma

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = Aw + B\overline{w} + F, \tag{1.1}$$

sendo

$$A = \frac{a+d}{4} + i\frac{c-b}{4}, \quad B = \frac{a-d}{4} + i\frac{b+c}{4},$$

$$w = u + iv \quad \text{e} \quad F = f + ig.$$

Quando A, B, F são "apenas" contínuas a equação (1.1) pode não ter solução no sentido clássico. Por exemplo, as soluçoes contínuas em uma vizinhança da origem $z = 0$ da equação

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{e^{2i\theta}}{\ln \frac{1}{r}}, \quad \text{sendo} \quad z = re^{i\theta}$$

são da forma

$$w(z) = -2z \ln \ln \frac{1}{r} + \Phi(z),$$

Φ holomorfa em uma vizinhança de $z = 0$.
Derivando com respeito a z obtemos

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -2 \ln \ln \frac{1}{r} + \frac{1}{\ln \frac{1}{r}} + \Phi'(z).$$

Vamos tratar um pouco mais da equação

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = f$$

Teorema de Green

Assuma que $\partial\Omega \in C^1$ e seja $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$. Então,

$$\iint_\Omega \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}}(x,y)\, dxdy = \frac{1}{2i}\int_{\partial\Omega} \omega(x,y)\, dz,$$

$$\iint_\Omega \frac{\partial \omega}{\partial z}(x,y)\, dxdy = -\frac{1}{2i}\int_{\partial\Omega} \omega(x,y)\, d\bar{z}.$$

Fórmula integral de Cauchy não homogênea

Assuma que $\partial\Omega \in C^1$ e seja $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$. Então,

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{\Omega} \frac{\partial\omega}{\partial\bar{\zeta}}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

e

$$\omega(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{\omega(\zeta)}{\bar{\zeta} - \bar{z}}\, d\bar{\zeta} - \frac{1}{\pi}\iint_{\Omega} \frac{\partial\omega}{\partial\zeta}(\zeta) \cdot \frac{d\xi d\eta}{\bar{\zeta} - \bar{z}},$$

com $z \in \Omega$, $\zeta = \xi + i\eta$.

Demonstração:
Seja $\zeta \in \Omega$ e sejam

$$D_\epsilon = \{z \in \Omega; |z - \zeta| < \epsilon\} \subset \Omega,$$

e

$$\Omega_\epsilon = \Omega \setminus D_\epsilon.$$

Denote

$$\psi(z) = \frac{\varphi(z)}{z - \zeta}.$$

Em $\Omega \setminus \{\zeta\}$ temos

$$\frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\varphi_{\overline{z}}}{z - \zeta}.$$

Pelo Teorema de Green,

$$2i \int_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}} dxdy = \int_{\partial \Omega} \psi dz - \int_{\partial D_\epsilon} \psi dz$$

Fazendo $z - \zeta = e^{i\theta}$ obtemos

$$\int_{\partial D_\epsilon} \psi dz = i \int_0^{2\pi} \varphi(\zeta + \epsilon e^{i\theta}) d\theta$$

e continuidade uniforme

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{2\pi} \varphi(\zeta + \epsilon e^{i\theta}) d\theta = 2\pi\varphi(\zeta).$$

Além disso,

$$\frac{\partial\psi}{\partial\overline{z}}(z) = \frac{\varphi_{\overline{z}}}{z-\zeta} \in L^1(\overline{\Omega});$$

logo, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\varphi_{\overline{z}}}{z-\zeta} dxdy = \int_{\Omega} \frac{\varphi_{\overline{z}}}{z-\zeta} dxdy.$$

A prova está completa.

Corolário: A função $L^1_{loc}(\mathbb{C})$

$$E_{z_0}(z) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{z - z_0} \quad \text{é tal que} \quad \frac{\partial E_{z_0}}{\partial \overline{z}} = \delta_{z_0}$$

De fato, para $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ tem-se

$$\varphi(z_0) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\cdot\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0}$$

$$= < \frac{\partial E_{z_0}}{\partial \overline{z}}, \varphi >$$

Em particular,

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \quad \text{é hipoelíptico;}$$

consequentemte,

$$f \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ holomorfa.}$$

Outra consequência: As soluções da equação $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$ em Ω, com $f \in C^0(\overline{\Omega})$ são da forma

$$u(z) = \Phi(z) - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\xi d\eta,$$

sendo $\Phi(z)$ holomorfa e $\quad \zeta = \xi + i\eta$.

A equação acima chama-se *Fórmula de Cauchy-Pompeiu*.

Voltemos a equação

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = Aw + B\overline{w} + F,$$

Vamos tratar o caso $F = 0$, isto é,

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = Aw + B\overline{w}$$

Daqui em diante, considere Ω um domínio (aberto e conexo) limitado em $\mathbb{C}$, com $0 \in \Omega$, a fronteira de Ω seja uma curva de Jordan regular C^1 orientada positivamente e as funções $A(z), B(z) \in C_c^{\alpha}(\mathbb{R}^2)$, com $0 < \alpha < 1$. Considere, também, $R > 0$ suficientemente grande tal que $Supp(A), Supp(B) \subset \overline{D}_R$, sendo $\overline{D}_R = \{z : |z| \leq R\}$ e $\overline{\Omega} \subset D_R$.

Função pseudo-analítica

Dizemos que $\omega(z)$ é uma função $[A, B]-$pseudo-analítica num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$, se $\omega \in C^1(\Omega)$ e ω satisfaz a equação

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = Aw + B\overline{w}$$

em qualquer ponto de Ω.

Na década de 1950, as primeiras representações sobre as funções pseudo-analíticas aparecem nos livros de Lipman Bers "Teoria das Funções Pseudo-analíticas" (1953) e Ilia N. Vekua "Funções Analíticas Generalizadas" (1959).

Os trabalhos são distintos; Bers construiu sua teoria generalizando praticamente cada um dos principais teoremas da Teoria das Funções Analíticas; Vekua desenvolveu seu estudo a partir da perspectiva da Teoria dos Operadores Diferenciais.

Proposição:
Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função que se anula em $\mathbb{C} \backslash \overline{D}_R$. Suponha que existe uma constante $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$. Então, a função $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$q(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_\Omega \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta,$$

com $\zeta = \xi + i\eta$, satisfaz

$$|q(z)| \leq KM, \ \forall z \in \mathbb{C}$$

e

$$|q(z_1) - q(z_2)| \leq KM|z_1 - z_2|^{\epsilon}, \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

para cada $0 < \epsilon < 1$, onde a constante K depende unicamente de ϵ e R.

Proposição:
Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função que se anula em $\mathbb{C} \backslash \overline{D}_R$. Suponha que existe uma constante $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$. Se f é Hölder contínua em Ω, então a função $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$q(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\xi d\eta$$

tem derivadas parciais Hölder contínuas em Ω.
Além disso,

$$\frac{\partial q}{\partial \bar{z}}(z) = f(z) \quad e \quad \frac{\partial q}{\partial z}(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, d\xi d\eta.$$

Teorema:
Seja $\omega : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua e limitada em um domínio Ω. Então, $\omega(z)$ é $[a, b]-$pseudo-analítica em Ω se, e somente se, a função definida por

$$f(z) = \omega(z) + \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{a(\zeta) \cdot \omega(\zeta) + b(\zeta) \cdot \overline{\omega}(\zeta)}{\zeta - z} \, d\xi d\eta$$

é analítica em Ω.

O resultado a seguir é uma extensão para funções $[a, b]-$pseudo-analíticas do conhecido resultado de Extensão de Funções Analíticas sobre Singularidades Removíveis.

Teorema:

Seja $\omega(z)$ uma função $[a, b]-$pseudo-analítica e limitada num domínio $0 < |z - z_0| < r$. Então, $\omega(z)$ pode ser definido em z_0 de modo que $\omega(z)$ seja $[a, b]-$pseudo-analítica em todo o disco $|z - z_0| < r$.

Demonstração:

Seja $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ e $D_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$.
Sabemos que ω é $[a, b]-$pseudo-analítica em D_0; logo,

$$f(z) = \omega(z) + \frac{1}{\pi} \iint_{D_0} \frac{a(\zeta) \cdot \omega(\zeta) + b(\zeta) \cdot \overline{\omega}(\zeta)}{\zeta - z} \, d\xi d\eta$$

é analítica em D_0.
Por outro lado, como ω é limitada em D_0, temos que f é limitada em D_0; além disso, como z_0 é uma singularidade isolada para f, z_0 é uma singularidade removível de f.
Logo, existe uma função analítica $\tilde{f} : D \to \mathbb{C}$ tal que $\tilde{f}|_{D_0} = f$.

Defina $\tilde{\omega} : D \to \mathbb{C}$ por

$$\tilde{\omega}(z) = \tilde{f}(z) - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{a(\zeta) \cdot \omega(\zeta) + b(\zeta) \cdot \overline{\omega}(\zeta)}{\zeta - z} \, d\xi d\eta. \qquad (1.2)$$

A segunda parcela do lado direito é de classe de C^α (devido a proposição anterior).
Em particular, $\tilde{\omega}$ é contínua.

Daí, como $\tilde{f}$ é analítica em D, $\tilde{\omega}$ é contínua e limitada em D, e vale (1.2) temos que $\tilde{\omega}$ é $[a, b]-$pseudo-analítica em D.

Princípio da similaridade clássico

Sejam $\omega(z)$ e $f(z)$ duas funções a valores complexos definidas em um domínio limitado Ω. Dizemos que, f e ω são similares, se existem constantes $M, N > 0$ tais que

$$N \leq \left|\frac{\omega(z)}{f(z)}\right| \leq M, \ \forall z \in \Omega, \text{ e além disso, } \frac{\omega}{f} \in C^0(\Omega).$$

Teorema A:
Seja $\omega : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função $[a, b]-$pseudo-analítica num domínio Ω. Então, existem uma função analítica $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e uma função $s : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ Hölder contínua tal que

$$\omega(z) = e^{s(z)} \cdot f(z).$$

Além disso, a constante e o expoente de Hölder para s dependem unicamente dos coeficientes $a(z)$ e $b(z)$.

Teorema B:
Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica definida num domínio limitado Ω. Então, existe uma função $s : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ Hölder contínua que se anula em um ponto fixado $z_0 \in \Omega$ tal que $\omega(z) = e^{s(z)} \cdot f(z)$ é $[a, b]-$pseudo-analítica em Ω. Além disso, a constante e o expoente de Hölder para s dependem unicamente dos coeficientes $a(z)$ e $b(z)$.

Seja Ω um aberto conexo e limitado.

Para $f \equiv 0$ o resultado é trivial; de fato, basta tomar $s \equiv 0$ e $\omega \equiv 0, \forall z \in \Omega$.

Suponhamos f não identicamente nula. Consideremos o aberto $\Omega_0 = \{z \in \Omega : f(z) \neq 0\} \subset \Omega$.

Agora, consideremos $f_0 \equiv f|_{\Omega_0}$. Note que f_0 é função analítica em Ω_0 e, além disso, $f_0(z) \neq 0, \forall\, z \in \Omega_0$.

Primeiro vamos demonstrar o teorema para f_0 em Ω_0.

Para isso, considere a seguinte equação

$$\frac{\partial s}{\partial \overline{z}}(z) = a(z) + b(z) \cdot \frac{\overline{f_0}(z)}{f_0(z)} \cdot e^{\overline{s}(z) - s(z)}, \tag{1.3}$$

para todo $z \in \Omega_0$.

Suponhamos que existe $s \in C^1(\Omega_0)$ tal que s é solução da equação (1.3).

Então, definindo $\omega_0(z) = e^{s(z)} \cdot f_0(z)$, para todo $z \in \Omega_0$, teríamos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_0}{\partial \overline{z}}(z) &= \frac{\partial f_0}{\partial \overline{z}}(z) \cdot e^{s(z)} + f_0(z) \cdot e^{s(z)} \cdot \frac{\partial s}{\partial \overline{z}}(z) \\
&= f_0(z) \cdot e^{s(z)} \left(a(z) + b(z) \cdot \frac{\overline{f_0}(z)}{f_0(z)} \cdot \frac{e^{\overline{s}(z)}}{e^{s(z)}} \right) \qquad (1.4) \\
&= a(z) \cdot f_0(z) \cdot e^{s(z)} + b(z) \cdot \overline{f_0}(z) \cdot e^{\overline{s}(z)}
\end{aligned}$$

Em resumo, para encontrar $s \in C^1(\Omega_0)$ tal que $\omega_0(z) = e^{s(z)} \cdot f_0(z)$, $\forall z \in \Omega_0$ seja solução de (1.4), basta encontrar $s \in C^1(\Omega_0)$ tal que s satisfaz (1.3).

Seja $B = \{s : \Omega \to \mathbb{C};\ s \text{ é contínua e limitada}\}$.
Definamos

$$\begin{array}{rcccccl} T & : & B & \to & B & & \\ & & s & \mapsto & T(s) & : & \Omega \to \mathbb{C} \\ & & & & & & z \mapsto Ts(z) = \sigma(z) - \sigma(z_0) \end{array},$$

com $z_0 \in \Omega_0$ ponto fixado, sendo $\sigma : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$\sigma(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega_0} \left[a(\zeta) + b(\zeta) \cdot \frac{\overline{f_0}(\zeta)}{f_0(\zeta)} \cdot e^{\overline{s}(\zeta) - s(\zeta)} \right] \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z},$$

com $\zeta = \xi + i\eta$.

Definamos a função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sendo

$$g(z) = \begin{cases} a(z) + b(z) \cdot \dfrac{\overline{f_0}(z)}{f_0(z)} \cdot e^{\overline{s}(z) - s(z)} & , \quad z \in \Omega_0 \\ 0 & , \quad z \in \mathbb{C} \backslash \Omega_0 \end{cases}.$$

Pode-se mostrar que existe $M > 0$ tal que $|g(z)| \leq M$, para todo $z \in \mathbb{C}$, isto é, g é limitada em $\mathbb{C}$. Além disso, o $Supp(g) \subset \overline{D}_R$.

Considere a função $\sigma_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sendo

$$\sigma_1(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega_0} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta.$$

Temos que σ_1 satisfaz

$$|\sigma_1(z)| \leq KM,\ \forall z \in \mathbb{C}$$

e

$$|\sigma_1(z_1) - \sigma_1(z_2)| \leq KM|z_1 - z_2|^{\alpha},\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

para $0 < \alpha < 1$ e $K > 0$ que depende unicamente de α e R.

Note que, $\sigma = \sigma_1|_{\Omega}$; logo,
$\sigma \in C^{\alpha}(\Omega)$. $(* 4)$

Daí, $Ts(z) = \sigma(z) - \sigma(z_0)$ é Hölder contínua em Ω.

B é um espaço de Banach (real), com a norma $\|\varphi\| = \sup_{z\in\Omega} |\varphi(z)|$.

Para K, $M > 0$ como acima, definamos:

$\Lambda = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{C};\ |\varphi(z_1)| \leq KM \text{ e } |\varphi(z_1)-\varphi(z_2)| \leq KM|z_1-z_2|^{\alpha}\}$.

Propriedades:

1. $\Lambda \neq \emptyset$, pois $\varphi \equiv 0 \in \Lambda$.
2. $\Lambda \subset B$, pois dado $h \in \Lambda$, temos que h é limitado em Ω; também, como h é Hölder contínua em Ω, temos que h é contínua em Ω.
3. Λ é convexo;
4. Λ é compacto, isto é, dada $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Lambda$, existe $\left(\varphi_{n_j}\right)_{n_j\in\mathbb{N}} \subset (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\left(\varphi_{n_j}\right)_{n_j\in\mathbb{N}}$ converge para alguma função $\varphi \in \Lambda$. **(não trivial)**
5. $T : B \to \Lambda$ é contínua em B, isto é, para cada $s_0 \in B$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $s \in B$ e $\|s - s_0\|_u < \delta$ então $\|Ts - Ts_0\|_u < \epsilon$.**(não trivial)**

Como $T : B \to \Lambda$ é uma aplicação contínua e $\Lambda \subset B$, temos que a restrição

$T|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$ é contínua.

Finalmente, como Λ é um subconjunto compacto convexo de um espaço de Banach B e $T|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$ é uma aplicação contínua, temos pelo teorema do ponto fixo de Shauder, que existe uma função $s \in \Lambda$ tal que

$$s = T|_\Lambda(s)$$

isto é,

$$s(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_0}\left[a(\zeta) + b(\zeta)\cdot\frac{\overline{f_0}(\zeta)}{f_0(\zeta)}\cdot e^{\overline{s}(\zeta) - s(\zeta)}\right] \times \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}\right) d\xi d\eta$$

Assim, como $a(z), b(z) \in C_c^{\alpha}(\mathbb{C}),\ f_0 \in C^{\infty}(\Omega_0)$ e $e^{\overline{s}(z) - s(z)} \in C^{\alpha}(\Omega)$, temos que

$$g(z) = a(z) + b(z)\cdot\frac{\overline{f_0}(z)}{f_0(z)}\cdot e^{\overline{s}(z) - s(z)} \in C^{\alpha}(\Omega_0).$$

Além disso, podemos mostrar que g é limitada em $\mathbb{C}$ e que $Supp(g) \subset \overline{D}_R$; daí, $s \in C^1(\Omega_0)$ e, além disso,

$$\frac{\partial s}{\partial \bar{z}}(z) = g(z) = a(z) + b(z) \cdot \frac{\overline{f_0}(z)}{f_0(z)} \cdot e^{\bar{s}(z) - s(z)},$$

para todo $z \in \Omega_0$.

Também, s anula-se em $z_0 \in \Omega_0$.

Logo, temos $\omega_0 : \Omega_0 \to \mathbb{C}$ dada por

$$\omega_0(z) = e^{s(z)} \cdot f_0(z)$$

$[a, b]-$pseudo-analítica em Ω_0.

Portanto, se $\Omega \backslash \Omega_0 = \emptyset$, a prova esta completa.

O caso em que $\Omega \backslash \Omega_0 \neq \emptyset$ segue do que foi feito até aqui + teorema de singularidade removível para pseudo-analítica.

Foram feitas extensões destes resultados para camos vetoriais que não são elípticos.

Teorema:

Sejam

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial y} - 3iy^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \qquad z_1(x,y) = x + iy^3$$

e sejam $A, B \in C^{2+\sigma}(\mathbb{R}^2)$, com $0 < \sigma < 1$, tais que

$$B(x,0) = \frac{\partial B}{\partial y}(x,0) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Então, existe um conjunto aberto, conexo e limitado $U \subset \mathbb{R}^2$ contendo a origem tal que qualquer $\omega \in C^1$ solução da equação

$$L_1\omega = A \cdot \omega + B \cdot \overline{\omega} \text{ em } U$$

tem a forma

$$\omega(x,y) = e^{s(x,y)} \cdot h(x + iy^3),$$

para alguma função holomorfa h definida em $z_1(U)$ e alguma função $s \in C^{\sigma}(U)$.

Reciprocamente, para cada função holomorfa h em $z_1(U)$, existe $s \in C^{\sigma}(U)$ tal que a função $\omega(x, y) = e^{s(x,y)} \cdot h(x + iy^3)$ satisfaz a equação

$$L_1\omega = A \cdot \omega + B \cdot \overline{\omega} \text{ em } U.$$

Teorema:

Sejam

$$L = \frac{\partial}{\partial y} - ix\frac{\partial}{\partial x}, \qquad z(x,y) = xe^{iy},$$

e $A, B \in C^{2+\sigma}\left(\mathbb{R}^2\right)$, com $0 < \sigma < 1$, tais que

$$B(0,y) = \frac{\partial B}{\partial x}(0,y) = 0, \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Então, existe um conjunto aberto, conexo e limitado $U \subset \mathbb{R}^2$ contendo a origem tal que qualquer $\omega \in C^1\left(\overline{U}\right)$ solução da equação

$$L\omega = A \cdot \omega + B \cdot \overline{\omega}$$

tem a forma

$$\omega(x,y) = e^{s(x,y)} \cdot H\left(z(x,y)\right),$$

para alguma função holomorfa H definida no interior de $z(U)$, $H \in C^{\sigma}\left(z\left(\overline{U}\right)\right)$ e alguma função $s \in C^{\sigma}\left(\overline{U}\right)$.

Reciprocamente, para cada função holomorfa H definida no interior de $z(U)$ e $H \in C^{\sigma}\left(z\left(\overline{U}\right)\right)$, existe $s \in C^{\sigma}\left(\overline{U}\right)$ tal que a função $\omega(x,y) = e^{s(x,y)} \cdot H\left(z(x,y)\right)$ satisfaz a equação

$$L\omega = A \cdot \omega + B \cdot \overline{\omega}$$

Para o operador de Mizohata não vale o princípio da similaridade.

$$L = \frac{\partial}{\partial y} - 2iy\frac{\partial}{\partial x}, \qquad z(x,y) = x + iy^2$$

Courant, R. e Hilbert L. *Methods of mathematical physics*, Vol. II. Wiley classics library, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA (1962).

Meziani, A. *On the similarity principle for planar vector fields: application to second order PDE*, J. Differential Equations, (1)157 (1999), 1-19.

Vekua, I. V. *Generalized Analytic Functions*. Pergamon, Oxford (1962).

Muito obrigado pela atenção!